جبر الى ر2 :

تمهيدية :

لتكن A جبرا نحو الحلقة التبديلية والواحدية R و B مثالية في A نعرف في الجبر A العلاقة ρ بالشكل الآتي :

$$\forall x, y \in A \quad x\rho y \Leftrightarrow x-y \in B$$

ان العلاقة هي علاقة تكافؤ على A ويرمز لكل عنصر $x \in A$ بصف التكافؤ المعرف بالعنصر x ρ

$$\bar{x} = x + B$$

مجموعة صفوف التكافؤ سنرمز لها بالشكل

$$A/B = \{\bar{x} = x+B \; ; \; x \in A\}$$

البرهان

لنبرهن ان العلاقة المعرفة ρ علاقة تكافؤ

$$\forall x, y, z \in A \Rightarrow x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$$

$$x\rho y \Rightarrow x-y \in B$$

$$y\rho z \Rightarrow y-z \in B$$

بالجمع $x-z \in B$ (نجمع الجمع)

تناظرية

$$\forall x, y \in A \; ; \; x\rho y \Rightarrow y\rho x \quad x\rho y$$

$$\Rightarrow x-y \in B$$

الجبر زمرة بالنسبة للجمع ⇐ النظير ينتمي الى B ⇐ النظير ينتمي

$$-(x-y) = y-x \in B$$

ليكن $x \in A$ عندئذ

$$\bar{x} = \{y \; ; \; y \in B \quad x\rho y\}$$

ولتكن $y \in \bar{x}$

حسب التعريف $\Rightarrow x\rho y \Rightarrow x-y \in B$

وبالتالي يوجد عنصر $b \in B$ بحيث أن

$x - y = b \Rightarrow y = x - b \in (x) + B$

$\Rightarrow \bar{x} \subseteq (x) + B$

لنأخذ الحلقة مؤلفة من عنصر واحد وبالتالي

$\bar{x} \subseteq x + B$ ---- (1)

$z \in x + B \Rightarrow z = x + k \; ; \; k \in B$

ومنه

حسب التعريف

$z - x = k \in B \Rightarrow x \rho z \Rightarrow z \in \bar{x}$

$\Rightarrow x + B \subseteq \bar{x}$ ---- (2)

من (1) ، (2) ينتج أن

$\bar{x} = x + B$

مبرهنة:

لتكن A جبرة فوق الحلقة R ، B مثالياً في A لنعرف المجموعة

$A/B = \{ \bar{x} = x + B \; ; \; x \in A \}$

العمليات

$\forall (x+B) \; ; \; (y+B) \in A/B \quad \forall \lambda \in R$

(1) $(x+B) + (y+B) = (x+y) + B$

(2) $\lambda(x+B) = \lambda x + B$

(3) $(x+B)(y+B) = x \cdot y + B$

أي A/B مع العمليات السابقة تشكل جبرة فوق الحلقة R ويسمى جبر القسمة على B

-مثال-

$A = \{ a, b, c, d \}$

لنعرف علاقة على A بالشكل

$R = \{ (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,a)$

$(c,d), (d,c) \}$

إن العلاقة R انعكاسية

إن العلاقة R تناظرية

إن العلاقة R متعدية

إن العلاقة R علاقة تكافؤ في المجموعة A

العناصر المرتبطة مع a

$$\bar{a} = \{a, b\} \qquad \bar{b} = \{b, a\}$$

$$\bar{c} = \{c, d\} \qquad \bar{d} = \{d, c\}$$

صفوف التكافؤ عددها بعدد عناصر المجموعة.

نلاحظ أن

$$\bar{a} = \bar{b} \quad \wedge \quad \bar{c} = \bar{d}$$

وبالتالي لو أخذنا مجموعة الخارج:

$$A/R = \{\bar{a}, \bar{c}\}$$

$$\bar{a} = \bar{b} \quad \text{فـ} \quad a \neq b \quad \text{إن}$$

(ميزة علاقة التكافؤ) صفوف التكافؤ متساوية لكن عناصرها غير متساوية

• كلية علاقة التكافؤ مستقلة عن اختيار المثل

البرهان

لنبرهن أولاً أن العمليات السابقة معرفة جيداً (مستقلة عن اختيار الممثل)

لتكن

$$a + B,\ a' + B,\ b + B,\ b' + B \in A/B$$

أخذنا صف التكافؤ ومثيرنا الممثل له

$$a + B = b + B$$

$$\text{و} \quad a' + B = b' + B$$

علينا أن نبرهن أن

$$(a + B) + (a' + B) = (b + B) + (b' + B)$$

من خلال المعادلة الأولى نجد

$$a \in a + B = b + B$$

ومنه يوجد $k \in B$ بحيث

$$a = b + k$$

أيضاً بما أن (من خلال المعادلة الثانية) $a' \in a' + B = b' + B$

ومنه يوجد $k' \in B$ بحيث أن

$$a' = b' + k'$$

⟸ حسب التعريف

$$(a+B)+(a'+B) = (a+a')+B$$

$$= [(b+k)+(b'+k')]+B$$

$$= [(b+b')+(k+k')]+B$$

$$= [(b+b')+B]+[\underbrace{(k+k')}_{\in B}+B]$$

$$= (b+b')+B+B$$

$$= (b+b')+B = (b+B)+(b'+B)$$

ناتج العملية لا يتغير إذا غيرنا الحل

مبرهنة :

ليكن $\bar{D}$ جبر جزئياً في جبر الناتج A/B نعرف المجموعة D بالشكل

$$D = \{a ; a \in A ; a+B \in \bar{D}\}$$

واضح من خلال التعريف D أن

$$\phi \neq D \subseteq A$$

$D \neq \phi$ لأن $B \in \bar{D}$ لأنه العنصر الحايد في A/B

لأن $o \in D$

$$o_A + B = B \in \bar{D} \Rightarrow o \in D$$

لنبرهن أن D جبر جزئي في A

$$\lambda, M \in R \quad ; a, b \in D$$

$$\lambda a + M b \in D$$

لنبرهن أن لنثبت $a, b \in D$ فإن

$$a+B \text{ و } b+B \in \bar{D}$$

جبر جزئي ⟸ مودول جزئي مباشرة

$\lambda(a+B)$ و $M(b+B) \in \bar{D}$

مغلقة بالنسبة للعملية +

$\lambda(a+B) + M(b+B) \in \bar{D}$

$(\lambda a+B) + (Mb+B) \in \bar{D}$

$= (\underbrace{\lambda a + Mb}_{\in A}) + B \in \bar{D}$

ومنه

$\lambda a + Mb \in D$

لدينا $\bar{D}$ جبر

$a+B \,,\, b+B \in \bar{D}$

$(a+B)\cdot(b+B) \in \bar{D}$

$(a.b)+B \in \bar{D}$

$\Rightarrow a\cdot b \in D$

ومنه هكذا نجد أن D جبر جزئي في A

لنبرهن أن D يحوي B

ليكن $b \in B$ عندئذ:

الحيادي في جبر الحاصل

$b+B = \hat{B} \in \bar{D}$

وحسب تعريف نجد $\Rightarrow b \in D$

$B \subseteq D$

لنبرهن أن $\bar{D} = D/B$

إن $B \subseteq D$ نجد أن B تشكل مثالية في D ومنه D/B تشكل جبر ولنبرهن أن

$\bar{D} = D/B$ جبر جزئي في (A/B)

ليكن $\bar{a} \in \bar{D} \subseteq A/B$ عندئذ

$\bar{a} = a+B \,,\, a \in A$

وحسب تعريف D فإن $a \in D$ أي أن

$\bar{a} \in D/B$ (حسب تعريف D/B)

وبالتالي $\bar{D} \subseteq D/B$ ... ⋆

لكن $x+B \subseteq D/B$ حيث $x \in A$ أي أن $x \in D \subseteq A$ فإن

$x+B \in A/B$

أو $x+B \in \bar{D}$

$\Rightarrow D/B \subseteq \bar{D}$ ... ⋆⋆

من ⋆ ، ⋆⋆ ينتج أن

$\bar{D} = D/B$